

无人机协同投放烟幕干扰弹的建模与优化研究

摘要

本文面向“烟幕干扰弹投放策略”问题，建立**统一坐标系与物理模型**，描述运动过程，并结合导弹指向假目标的直线飞行，提出基于“视线线段——球体最近距离”的**完全遮蔽判定**。在此统一物理建模基础上，以“真目标有效遮蔽时长最大化”为主线，分阶段构建优化求解框架。通过**模拟退火、贝叶斯优化、遗传算法、多岛并行搜索**参数，求解出干扰弹的最优投放策略，并对模型进行了检验和误差分析。在描述以下问题时，都以**统一物理建模为基础**，再进行优化求解。

针对问题一：考虑到 1 架无人机投放 1 枚烟幕干扰弹实施对一枚导弹 M1 的干扰，且速度与时序条件都固定，进行数值仿真计算得到单枚干扰弹对 M1 的有效遮蔽时长为**1.39s**。

针对问题二：仍为 1 架无人机投放 1 枚干扰弹来干扰 1 枚导弹，以无人机飞行方向、速度、投放时刻与引信延时为**决策变量**，建立单目标优化模型，采用**模拟退火(SA)**并由**贝叶斯优化(BO)**自动调节**模拟退火超参数**，显著降低了人工调参的难度，在有限计算资源下高效搜索，进一步提升了算法的全局搜索能力与收敛稳定性，从而保证了所获解的可靠性与优质性；获得单弹最优投放方案，遮蔽时长提升至**4.77s**，此时，应调整 FY1 的飞行方向单位矢量为 $\mathbf{u} = (0.98727, 0.15910, 0)$ ，取 x 轴为 0° ，逆时针为正方向得到飞行角度为**9.155°**，飞行速度为**71.48302m/s**，烟幕干扰弹投放时刻为 $0s$ ，引信延时为**0.93753s**。

针对问题三：扩展为 1 架无人机投放 3 枚烟幕弹干扰 1 枚导弹的协同场景，采用改进 SA 并用 BO 自动调参来求解，实现连续遮蔽接力，总有效遮蔽时长达**7.40s**，具体优化策略已保存至 result1.xlsx。支撑材料中绘制有可 360° 旋转的动画，使得此问结果更加清晰。

针对问题四：本文引入 3 架无人机协同，构建多主体参数联合优化模型。在进一步优化单目标模型的基础上，采用**遗传算法(GA)**并结合**多岛并行框架**以增强全局搜索能力和种群多样性，有效避免了早熟收敛的问题。得到多机协同策略，总遮蔽时长提高到 **8.40s**，具体优化策略已保存至 result2.xlsx。

针对问题五：在先采用遗传算法结合多岛并行框架尽可能提高遮蔽时长的基础上，本文进一步综合考虑“最短导弹遮蔽时长最大化、遮蔽资源利用率、无人机能耗”三个优化目标，引入**NSGA-II 算法 + 多岛并行机制**，在以提高遮蔽性能为主要目标、有效增强了全局性与收敛性的同时，**兼顾能源损耗和资源利用效率**，获得遮蔽性能更为优质、实际运用价值更高的解，具有更强的鲁棒性和工程应用价值；代表性方案下三枚导弹遮蔽总时长为 **18.27s**，具体优化策略已保存至 result3.xlsx。

结果表明，所建统一的物理与几何判定模型能稳定刻画遮蔽机理，所用智能优化方法在多弹、多机及多目标约束下均能有效提升遮蔽时长并降低资源浪费，具有工程可实现性与推广价值。

关键词：烟幕干扰弹 模拟退火 贝叶斯优化 遗传算法 NSGA-II 多岛并行

一、问题重述

1.1 问题背景

烟幕干扰弹具有成本低、使用便捷、干扰效果强等优点^[1]，可结合无人机远程投放和精确控制，在导弹与真目标之间抛撒烟幕干扰弹，通过合理设计飞行航迹与起爆时机，实现一种高效的新型防护策略。

作战场景：主要装置包括真目标和假目标、3 枚导弹、5 架无人机以及它们投放的烟幕干扰弹，无人机在接受到控制中心的任务后接警，投放烟幕干扰弹以掩护真目标。

工作原理：无人机在接警后飞至指定位置投放烟幕干扰弹，干扰弹下落并延时起爆形成球状烟幕云团，该云团在 20 s 内能保持提供有效遮蔽效果的浓度，并会快速下沉。若其遮蔽导弹与真目标之间的视线通道，则成功达到干扰效果。

1.2 问题提出

问题一：已知无人机 FY1 以 120 m/s 的速度飞向假目标，受领任务 1.5 s 后投放 1 枚烟幕干扰弹，间隔 3.6 s 后干扰弹弹起爆。求烟幕干扰弹对导弹 M1 的有效遮蔽时长。

问题二：为使对 M1 的遮蔽时间尽可能长，求无人机 FY1 的飞行方向、速度、投放点和起爆点。

问题三：利用无人机 FY1 投放 3 枚导弹，为尽可能干扰 M1，求解烟幕干扰弹的最优投放策略。

问题四：利用无人机 FY1、FY2、FY3 各投放 1 枚导弹，为尽可能干扰 M1，求解烟幕干扰弹的最优投放策略。

问题五：5 架无人机，每架最多投放 3 枚干扰弹，来实现对三枚导弹 M1、M2、M3 的干扰，求解烟幕干扰弹的最优投放策略。

二、问题分析

2.1 问题一分析：

条件完全确定，题目本质上可简化为运动学计算。无人机飞行、干扰弹下落、云团下沉和导弹直线飞行的轨迹均已知，需要判断导弹与真目标的视线通道在多大时间段内被云团遮挡，来求有效遮蔽时长。

2.2 问题二分析：

在问题一的基础上，通过调整无人机的航向、速度、投放点和起爆延时，来最大化遮蔽时间。该题目本质是一个带约束的单目标优化问题。由于导弹、烟幕和真目标之间的几何关系是非线性的，所以需要清晰的参数化建模并找到最佳组合方法。

2.3 问题三分析：

本题扩展为同一无人机多次投放，需合理安排三枚干扰弹的投放时机与起爆延时，使云团遮蔽时间尽可能衔接，避免真目标暴露或过度重叠造成浪费。该题目本质是时间与空间排布上的耦合问题。

2.4 问题四分析：

进一步引入多架无人机协同，问题转化为多主体的任务分配与时序优化。不同无人机在空间和时间上配合投放，需要同时考虑遮蔽时段的连续性与资源利用率。

2.5 问题五分析：

最终场景中涉及多目标（3 枚导弹）、多平台（5 架无人机）与多次投放（每架最多 3 枚），形成了一个多目标组合优化问题。既要保证对所有导弹的有效遮蔽，又要满足题目中无人机投放次数以及飞行过程中的约束条件。

三、模型假设

为保证模型结构清晰、便于计算，对实际情况作如下合理简化假设：

1. 来袭导弹默认攻击假目标，由于现代自动修正等技术，不受重力影响，始终保持匀速直线飞行，且飞行方向始终指向假目标，不会中途变轨或转弯；真目标与假目标均固定不动，其几何形状与尺寸符合题目给定条件。假目标位于真目标前方，用于吸引导弹制导，其本身不参与烟幕遮蔽效果的判定。^[2]

2. 无人机在接收任务后可瞬时调整方向，此后保持等高度直线匀速飞行，速度范围为 70–140 m/s，忽略风力或空气阻力的干扰。

3. 烟幕干扰弹在投放后仅受重力作用自由下落，不考虑空气阻力影响。

4. 烟幕干扰弹起爆后瞬时形成球形烟幕云团，云团以 3 m/s 匀速下沉，始终保持球形，不受外界干扰。

5. 云团在起爆后 20 s 内，其中心半径 10 m 范围内的浓度可以提供有效遮蔽，超过 20 s 后，遮蔽效果消失。不同烟幕云团之间相互独立，不发生叠加或稀释。

6. 遮蔽判定以导弹飞行全程的实时视线为依据：若导弹与真目标之间的直线通道在某一时刻与任一有效云团区域相交，则在该时刻真目标被视为遮蔽。不同烟幕干扰弹所形成的遮蔽时间段可以不连续，均可计入总的有效遮蔽时长。

7. 建立以假目标为原点的三维直角坐标系，水平面为 xy 平面，竖直方向为 z 轴。所有位置、速度与时间均以题设数据为准，不考虑测量误差。

四、符号说明

符号	意义	单位
j	导弹编号($M_j, j = 1, 2, 3$)	/
k	无人机编号($FY_k, k = 1, \dots, 5$)	/
i	第 k 架无人机投放的第 i 枚干扰弹	/
(x, y, z)	三维直角坐标系下的位置	m
$\mathbf{e}_z$	竖直向上单位矢量	
$\mathbf{z}_0$	真目标下底面圆心坐标: $(0, 200, 0)$	/
v_{missile}	导弹飞行速度: 300	m/s
$\mathbf{m}_j(t)$	时刻 t 导弹 j 的位置	m
$\mathbf{u}_k$	无人机 k 飞行方向单位矢量	/
v_k	无人机 k 飞行速度	m/s
$\mathbf{p}_k(t)$	时刻 t 无人机 k 的位置	m
$t_{0,k,i}$	第 k 架无人机的第 i 枚干扰弹投放时刻	s
$\tau_{k,i}$	第 k 架无人机的第 i 枚干扰弹引信延时	s
$t_{\text{explode},k,i}$	第 k 架无人机的第 i 枚干扰弹干扰弹起爆时刻	s
$\mathbf{c}_{k,i}(t)$	第 k 架无人机的第 i 枚干扰弹云团中心位置	m
r	烟幕云团有效半径: 10	m
v_{down}	烟幕云团下沉速度: 3	m/s
τ_c	烟幕云团有效遮蔽时间: 20	s
g	重力加速度: 9.8	m/s ²
$\mathcal{J}$	真目标集合: 圆柱体	/
$l_j(s, t)$	导弹 i 与真目标之间的视线线段	m
$\rho_{j,k,i}(t)$	视线线段到云团中心的最小距离	m
$I(t)$	时刻 t 导弹 i 对目标完全遮蔽的指示函数	/
F	有效完全遮蔽的累计时长: 优化目标	s

注: 未说明的变量以其在符号出现处的具体解释为准。

五、模型建立与求解

5.1 问题一 模型的建立与求解

5.1.1 模型建立

第一问主要研究物理模型。为了给之后的问题提供便利，在本文中，我们搭建适用于所有情况的统一物理模型。

1.坐标系的建立

为描述无人机、烟幕干扰弹、云团及导弹的运动状态，建立空间直角坐标系 (x, y, z) ，其中：

设定原点为假目标所在位置，并设定竖直向上方向为 z 轴正方向。

同时，为写出下方三维矢量表达式，设定单位矢量 $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ 竖直向上。

2.运动学模型建立

首先明确下文提到的 k 为无人机编号， j 为导弹编号， i 为同一无人机的第 i 枚干扰弹。在下文解决具体问题时，可视情况忽视或带入脚标。

1)无人机运动模型

设第 k 架无人机初始位置，即无人机在接警（时间零点）的位置为：

$$\mathbf{p}_{0,k} = (x_{0,k}, y_{0,k}, z_{f,k}) \quad (1)$$

飞行方向单位矢量为：

$$\mathbf{u}_k = (u_{x,k}, u_{y,k}, 0), u_{x,k}^2 + u_{y,k}^2 = 1 \quad (2)$$

其中 $u_x^2 + u_y^2 = 1$ ，飞行速度：

$$v_{f,k} \in [70, 140] \quad (3)$$

可以得到无人机的轨迹，即无人机在时刻 t 的位置为：

$$\mathbf{p}_k(t) = \mathbf{p}_{0,k} + v_{f,k} t \mathbf{u}_k \quad (4)$$

其中 $\mathbf{v} = v_{f,k} \mathbf{u}$ 为投放瞬间干扰弹继承无人机的水平速度。

2)干扰弹下落与起爆

每架无人机的第 i 枚干扰弹投放后，经延时 τ 起爆，起爆时刻为：

$$t_{\text{explode},k,i} = t_{0,k,i} + \tau_{k,i} \quad (5)$$

其中， $t_{0,k,i}$ 为投放时刻。

依据题意，当同一枚无人机投放至多三枚干扰弹时，三次投放需满足同一架无人机投放两枚干扰弹的间隔至少为 1 s ，即 $t_{0,k,i+1} - t_{0,k,i} \geq 1, i = 1, 2$ 。

起爆点，即云团初始中心为：

$$\mathbf{c}_{0,k,i} = \mathbf{p}_k(t_{0,k,i}) + \mathbf{v}_{k,i}(t_{\text{explode},k,i} - t_{0,k,i}) - \frac{1}{2}g(t_{\text{explode},k,i} - t_{0,k,i})^2 \mathbf{e}_z \quad (6)$$

3)云团运动

起爆后，云团瞬时形成半径为 r 的球体，且其中心以恒定速度 $3m/s$ 下沉。设云团中心位置为 $c(t)$ ，则：

$$c_{k,i}(t) = c_{0,k,i} - v_{\text{down}}(t - t_{\text{explode},k,i})\mathbf{e}_z, \quad t \in [t_{\text{explode}}, t_{\text{explode}} + \tau_c] \quad (7)$$

4) 导弹运动

设导弹在接警时刻的位置为 $\mathbf{m}_{0,j}$ ，其飞行方向始终指向假目标，即坐标原点。方向单位矢量为：

$$\mathbf{w}_j = -\frac{\mathbf{m}_{0,j}}{\|\mathbf{m}_{0,j}\|} \quad (8)$$

导弹轨迹为：

$$\mathbf{m}_j(t) = \mathbf{m}_{0,j} + v_{\text{missile}} t \mathbf{w}_j \quad (9)$$

3. 视线遮挡判断

1) 目标集合（几何形状）

把真目标当作一个实心圆柱体集合 $\mathcal{T}$ ：

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) : (x)^2 + (y - 200)^2 \leq 7^2, 0 \leq z \leq 10\} \quad (10)$$

由于目标是一个底面半径 7 米，高十米的圆柱体，我们在计算中在其上、下底面及侧面均匀取点，共取一百点。

此简单取点方法完全适用于前三问，在处理后两问较复杂的问题时需根据具体情况再做调整来优化，这一部分会在后文中具体展开。

2) 视线线段族（从导弹出发）

第 j 枚导弹在时刻 t 的位置是 $\mathbf{m}_j(t)$ ，真目标位置固定为 $\mathbf{z}_0$ ，则导弹 j 到目标的直线段为

$$l_j(s, t) = \mathbf{z}_0 + \varepsilon(\mathbf{m}_j(t) - \mathbf{z}_0), \varepsilon \in [0, 1] \quad (11)$$

3) 云团（球）与线段的最近距离

导弹 j 的直线段与云团 (k, i) 的最近距离为

$$\rho_{j,k,i}(t) = \min_{s \in [0, 1]} \|l_j(s, t) - c_{k,i}(t)\| \quad (12)$$

4) “被某个云团遮住”与“完全遮蔽”的判定

对于真目标上一点 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$ ，若存在某个云团满足

$$\rho_{j,k,i}(\mathbf{x}, t) \leq r \quad (13)$$

则说明导弹 j 与点 $\mathbf{x}$ 的连线被该云团遮蔽。

若对真目标集合中的任意一点 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$ ，都存在至少一个云团使得 $\rho_{j,k,i}(\mathbf{x}, t) \leq r$ ，则定义在时刻 t ，导弹 j 对目标处于完全遮蔽状态：

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \exists (k, i) \text{ 使得 } \rho_{j,k,i}(\mathbf{x}, t) \leq r \quad (14)$$

也就是说，只有当真目标的所有点都被某些云团阻断视线时，才判定为完全遮蔽；若仍有任意点能被导弹观测到，则判定为未被完全遮蔽。

本问只需采取 $j, k, i = 1$ 的特例求解即可。

5.1.2 求解结果及分析

根据上述求解过程，固定步长 $\Delta t = 0.01$ 进行数值模拟，得到有效遮蔽时长为 1.39 s 。

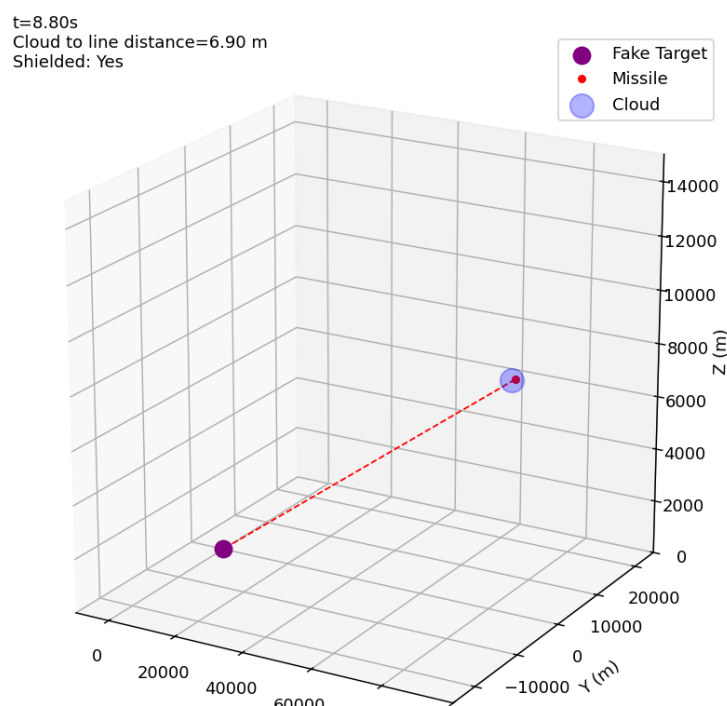


图1 第一问动画截图

如图 1 所示，深紫色点为真目标位置，红色点为导弹在不同时刻的飞行位置，淡紫色球体表示在该时刻生成的烟幕云团。当云团下沉至与导弹和真目标连线相交时，导弹的视线被完全遮蔽，从而达到干扰效果。由于云团不断下沉并偏离最佳位置，完全遮蔽仅能维持短暂时间。

这样够验证建模与判定方法的可行性，也揭示了 1 枚干扰弹遮蔽的局限性。这一效果在动画中能够清晰呈现，动画已放于支撑材料中。

5.2 问题二 模型的建立与求解

5.2.1 模型建立

1.运动学模型

本问沿用第一问的运动学建模。

2.建立优化模型

本问将无人机的飞行方向、飞行速度、投放时刻和引信延时作为决策变量，需要建立优化模型求解，使遮蔽时间尽可能长。

设决策变量集合为：

$$\{\mathbf{u}, v_f, t_0, \tau\}, u_x^2 + u_y^2 = 1, v_f \in [70, 140], t_0 \geq 0, \tau \geq 0 \quad (15)$$

起爆时刻 $t_{\text{explode}} = t_0 + \tau$ ，仅在区间 $[t_{\text{explode}}, t_{\text{explode}} + \tau_c]$ 进行遮蔽判定与累计。

为了便于计算，将时间离散化，设步长 $\Delta t > 0$ ，则离散时刻集合为：

$$\mathcal{J} = t_{\text{explode}} + n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{\tau_c}{\Delta t} \right\rfloor \quad (16)$$

为便于数值实现，定义完全遮蔽指示函数：

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \exists i \text{ s.t. } \min \rho(\mathbf{x}, t) \leq r \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{x}$ 为目标上所取的一点； $\min \rho(\mathbf{x}, t)$ 表示导弹——目标点视线段到云团中心的最小距离。得到目标函数为：

$$F = \sum_{t \in \mathcal{J}} I(t) \Delta t \quad (18)$$

通过最大化 F 获得最大化无人机投放干扰弹所能获得的有效遮蔽时间。

综上，本问可表述为以下优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}, v_f, t_0, \tau} \quad & F = \sum_{t \in \mathcal{J}} I(t) \Delta t \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + v_f t \mathbf{u}, u_x^2 + u_y^2 = 1, v_f \in [70, 140]; \\ t_{\text{explode}} = t_0 + \tau, \mathbf{c}_0 = \mathbf{p}(t_0) + \mathbf{v}(t_{\text{explode}} - t_0) - \frac{1}{2} g(t_{\text{explode}} - t_0)^2 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 - v_{\text{down}}(t - t_{\text{explode}}) \mathbf{e}_z, t \in [t_{\text{explode}}, t_{\text{explode}} + \tau_c]; \\ \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 + v_{\text{missile}} t \mathbf{w}, v_{\text{missile}} = 300; \\ \forall t \in \mathcal{J} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

5.2.2 模型求解方法

1. 利用模拟退火算法求解模型

Step1: 邻域扰动设计

为进一步扩大搜索范围，本文针对不同变量需要设置不同的扰动方式。

(i) $\mathbf{u}$ 为无人机飞行方向，保证搜寻的新的方向向量仍满足 $u_x^2 + u_y^2 = 1$ ，为了方便运算，等价定义航向角为 ϕ ，采用小角旋转扰动。

在高温阶段，取较大的 ϕ_{max} ，便于覆盖不同的航向方向，避免陷入局部最优；低温阶段，逐渐缩小 ϕ_{max} ，用于微调航向，使得遮蔽更精确；自适应切换阶段，随温度下降线性或指数缩小 ϕ_{max} 。

(ii) v_f 为无人机速度，采用加法扰动。

高温阶段，在较大范围内对 Δv 采样；低温阶段，缩小扰动范围；自适应切换阶段，根据接受率调整 Δv 的最大幅度，保持在 20%–50% 的接受率区间。

(iii) 干扰弹的投放时刻 t_0 与引信延时 τ 直接决定起爆点与遮蔽时间，目标函数对它们高度敏感。在高温阶段，在退火初期温度较高时，采用均匀扰动；低温阶段，采用高斯扰动，并控制方差随温度逐步减小进一步精调；自适应切换阶段，扰动方式随温度

平滑切换：高温时均匀扰动占主导，低温时高斯扰动占主导。这样既有全局性，又能在关键时刻做精确微调。

此外，所有变量均采用硬约束策略，约束条件已在上方列出。一旦扰动后超出物理可行区间，直接截断，而非引入惩罚函数。这样能从源头上保证物理可行性。

Step2: 能量函数与接受准则

定义能量函数：

$$E(\mathbf{u}, v_f, t_0, \tau) = -F \quad (20)$$

将目标函数最大化转化为能量最小化问题。其中， F 为前文提及的目标函数。

设当前解的能量为 E ，候选解的能量为 E' ，则能量差为：

$$\Delta E = E' - E \quad (21)$$

若 $\Delta E \leq 0$ ，候选解能量更低，即目标值更优，则无条件接受；

若 $\Delta E > 0$ ，候选解能量更高，即目标值更差，则以概率 P 接受，概率 P 表示为：

$$P = e^{-\frac{\Delta E}{T}} \quad (22)$$

其中 T 为当前温度。

若某次扰动导致无法在有效时间内生成完整采样集 $\mathcal{J}$ ，或无法完成遮蔽判定，则直接判定为无效解并拒绝，不进入接受判定，算法继续下一次扰动。

Step 3: 温度控制与扰动幅度收缩

在模拟退火算法中，温度 T 显著影响算法的全局探索能力和局部收敛速度。为减小 T 产生偏差对结果造成的显著影响，本文采用几何降温与扰动幅度收缩相结合的方法。

设定初始温度 T_0 ，使得初始阶段差解的接受概率约为 60%，以便充分跳出局部最优。温度衰退方式采取几何退火：

$$T_{k+1} = \alpha T_k \quad (23)$$

其中 k 为温度层数， $\alpha \in (0,1)$ 是固定衰减系数。

扰动幅度与温度同步收缩。记各决策变量的初始扰动上限为 $\phi_{\max}, |\Delta v|_{\max}, |\Delta t_0|_{\max}, |\Delta \tau|_{\max}$ ，则在温度为 T 时扰动幅度 $\Delta_{\max}$ 为：

$$\Delta_{\max}(T) = \Delta_{\max}(0) \cdot \frac{T}{T_0} \quad (24)$$

由此，在高温阶段扰动幅度大，算法可以在广阔解域中搜索。在低温阶段扰动幅度逐渐减小，搜索范围集中在优解附近，能够有效提高目标函数 F 的最优值。

Step 4: 数值实现

(i) 无人机飞行方向 $\mathbf{u}$ 初始指向假目标方向，飞行速度 $v_f = 105 \text{ m/s}$ ；干扰弹的投放时刻与引信延时 t_0, τ 在区间 $[0,2] \text{ s}$ 内随机初始化，有助于尽快找到在有效时间内的关键时段。

(ii) 为提升全局性，采用多起点策略，即从不同随机初始解独立运行 3–5 次模拟退火，最后取目标函数值 F 最大的那次方案作为输出。

(iii) 步长设计：先利用较大时间步长进行上述求解，在基本框定遮盖时间范围后，进一步缩小步长，寻找最优参数值，以节省计算成本。

2. 利用贝叶斯优化实现超参数自动调优

为提升模拟退火的性能，在外层引入贝叶斯优化，自动搜索其超参数的最优组合，从而避免人工调参带来的低效与不稳定。本文中，贝叶斯优化仅用于优化模拟退火超参数，不用于最终决策目标的优化。

Step 1: 待调超参数向量 θ

记需调节的超参数集合为

$$\theta = (T_0, \alpha, L, \sigma) \quad (25)$$

其中 T_0 为初始温度， α 为降温系数， L 为每一温度层的迭代步数， σ 为扰动幅度控制因子。

为保证物理合理性与数值稳定性，根据经验对各分量给出估计的取值区间：

$T_0 \in [0.5, 2]$ ，确保初始阶段接受率合适；

$\alpha \in [0.85, 0.99]$ ，控制温度的衰减速度；

$L \in [10, 100]$ ，平衡每层迭代精度与计算量；

$\sigma \in [0.5, 2]$ ，调节扰动幅度。

这些区间构成了贝叶斯优化的搜索空间。

Step2: 贝叶斯优化前的初始设计：

(i) 进行贝叶斯优化前，需要先获得初始训练集。先在超参数空间中利用拉丁超立方采样 (LHS) 生成 10 个初始超参数向量 θ ，并运行模拟退火(SA)10 次，作为不同随机种子。定义：

$$J_1(\theta) = \max_{s=1, \dots, S} F, \quad J_2(\theta) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F \quad (26)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \left(\max_{s=1, \dots, S} F + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F \right) \quad (27)$$

a. 在获得初始训练集过程中，取 $S=10$ 。 $J_1(\theta)$ 追求最优表现， $J_2(\theta)$ 追求平均稳健性。取前 3 次最好值的平均。

为减少单次模拟退火运行的随机性，每个超参数向量在相同预算下运行，并取平均结果作为其目标值 $J(\theta)$ 。此处的计算预算由温度层数 K 与每层尝试次数 L 的乘积给出：

$$M = K \times L \quad (28)$$

b. 此函数作为接下来贝叶斯优化的目标函数，即

$$\begin{aligned} & \max J(\theta), \\ \text{s.t. } & \begin{cases} T_0 \in [0.5, 2] \\ \alpha \in [0.85, 0.99] \\ L \in [10, 100]; \\ \sigma \in [0.5, 2]; \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

(ii) **标准化:** 为了便于之后的高斯过程建模，对输入超参数向量 θ 的各维度进行标准化。对于特殊参数 α ，先进行 logit 变换：

$$\text{logit}(\alpha) = \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (30)$$

再标准化, 从而保证其定义域在 $[0,1]$ 内。输出目标函数值 $J(\theta)$ 同样经过标准化, 以消除量纲差异。

Step3: 建立贝叶斯优化模型

(i) 代理模型

代理模型为高斯过程回归 (GPR), Matérn 5/2 核 + 白噪声项, 其中白噪声项为应对模拟退火随机性的观测噪声。

Matérn 核($\nu = 2.5$):

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}r}{\ell} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{3}r}{\ell} \right), \quad r = \|x - x'\| \quad (31)$$

加入白噪声项:

考虑模拟退火的随机性, 在训练点处加入噪声核以建模观测噪声:

$$k_{\text{total}}(x, x') = k_{\text{Matern}}(x, x') + \sigma_n^2 \delta_{x, x'} \quad (32)$$

(ii) 采集函数: 期望改进(EI), 添加小抖动 $\xi \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ 以鼓励早期探索。设当前已评估样本的最优聚合性能为 $F^+ = \max J(\theta)$ 。GPR 在 θ 处给出预测均值与标准差 $\mu(\theta), \sigma(\theta)$ 。引入探索因子 $\xi > 0$, 则

$$\text{EI}(\theta) = (\mu(\theta) - F^+ - \xi) \Phi \left(\frac{\mu(\theta) - F^+ - \xi}{\sigma(\theta)} \right) + \sigma(\theta) \phi \left(\frac{\mu(\theta) - F^+ - \xi}{\sigma(\theta)} \right) \quad (33)$$

当 $\sigma(\theta) = 0$ 时, 令 $\text{EI}(\theta) = 0$ 。

Step4: 实验设计

(i) 并行计算策略: 在每一轮贝叶斯优化迭代中, 选择 1–4 个新的超参数组合 θ 并行计算, 运行模拟退火获得对应 $J(\theta)$, 并更新高斯过程模型。

(ii) 步长设计: 先利用较大时间步长进行上述求解, 在基本框定遮盖时间范围后, 进一步缩小步长, 寻找最优参数值, 以节省计算成本。

3. 算法实现完整过程

先在超参数空间中利用拉丁超立方采样 (LHS) 生成 10 个初始超参数向量 θ , 并运行模拟退火(SA)10 次, 获得初始训练集;

运行约 20 轮贝叶斯优化过程迭代, 当达到最大轮数或 EI 值持续较低时, 终止外层优化。

取 $J(\theta)$ 最高的 θ^* 作为最终超参数, 以 θ^* 运行 SA 约 100 次, 取 F 最大的那次方案作为最终解;

保存最优超参数 θ^* 、随机数初始值、采样点集 $\mathcal{X}$ 。

5.2.4 求解结果及分析

利用模拟退火及贝叶斯优化, 得到本问最优解, 使遮蔽时间能达到 $4.77s$ 。此时, 应调整 FY1 的飞行方向单位矢量为 $\mathbf{u} = (0.9872, 0.1591, 0)$, 取 x 轴为 0° , 逆时针为正方向得到飞行角度为 9.155° , 飞行速度为 $71.48302m/s$, 烟幕干扰弹投放时刻为 $0s$, 引信延时为 $0.93753s$ 。

优化后无人机的飞行方向和速度使得投放点更接近导弹视线最佳交点，延时引信的设置让云团在关键时刻起爆，因此遮蔽区间显著延长。

此问得以说明通过优化投放参数，可以显著提高单弹的防护效率。

5.3 问题三 模型的建立与求解

5.3.1 模型建立

1.运动学模型

本问所采用的运动学建模完全符合开头的统一论述，由于此问涉及一架无人机 FY1 投放 3 枚烟幕干扰弹实施对一枚导弹 M1 的干扰，取 $k = 1, j = 1, i \in \{1,2,3\}$ 。需要特别强调的是，

$$t_{0,1,i+1} - t_{0,1,i} \geq 1, i = 1,2 \quad (34)$$

其余物理模型不再赘述。

对于后文所用**视线遮挡判定**，做同样取值。

2.建立优化模型

1)目标函数定义

目标函数的核心是“最大化 3 枚烟幕弹云团对真目标的有效遮蔽时长”，延续第二问的逻辑，扩展至多弹协同场景，确保定义的一致性与合理性。具体推导过程与第二问完全一致。

时间网格为：

$$\mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^3 \left\{ t_{\text{explode},1,1,i} + n\Delta t \mid n = 0,1, \dots, \left\lfloor \frac{\tau_c}{\Delta t} \right\rfloor \right\} \quad (35)$$

总有效遮蔽时长目标函数为：

$$F = \sum_{t \in \mathcal{J}} I(t) \Delta t \quad (36)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{p}_1(t) = \mathbf{p}_{0,1} + v_{f,1} t \mathbf{u}_1, u_x^2 + u_y^2 = 1, v_{f,1} \in [70,140]; \\ t_{\text{explode},1,i} = t_{0,1,i} + \tau_{1,i}, \mathbf{c}_0 = \mathbf{p}(t_{0,1,i}) + \mathbf{v}(t_{\text{explode},1,i} - t_{0,1,i}) - \frac{1}{2} g (t_{\text{explode},1,i} - t_{0,1,i})^2 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{c}_{1,i}(t) = \mathbf{c}_{0,1,i} - v_{\text{down}} (t - t_{\text{explode},1,i}) \mathbf{e}_z, t \in [t_{\text{explode},1,i}, t_{\text{explode},1,i} + \tau_c]; \\ \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 + v_{\text{missile}} t \mathbf{w}, v_{\text{missile}} = 300; \\ t_{0,1,2} - t_{0,1,1} \geq 1, t_{0,1,3} - t_{0,1,2} \geq 1 \end{cases}$$

2.优化策略设计

决策变量向量

决策变量包含“无人机飞行参数”和“3 枚弹时序参数”，共 8 个变量，构成优化向量 Θ 。

$$\Theta = [u_{x1}, u_{y1}, v_{f1}, t_{0,1,1}, t_{0,1,2}, t_{0,1,3}, \tau_{1,1}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}]^T \quad (37)$$

5.3.2 模型求解方法

第三问的优化核心是“无人机参数 + 3 枚弹时序参数”的多变量协同优化，基于第二问的模拟退火框架，调整决策变量、约束处理与扰动策略，同时保留贝叶斯优化的超参数调优能力，确保在复杂约束下找到全局最优解。

具体过程与问题二相同，此处不再重复叙述。

5.3.3 求解结果及分析

利用模拟退火及贝叶斯优化，得到最优策略，本问遮蔽时间可达到7.40s，具体投放策略结果已保存到文件 result1.xlsx 中。

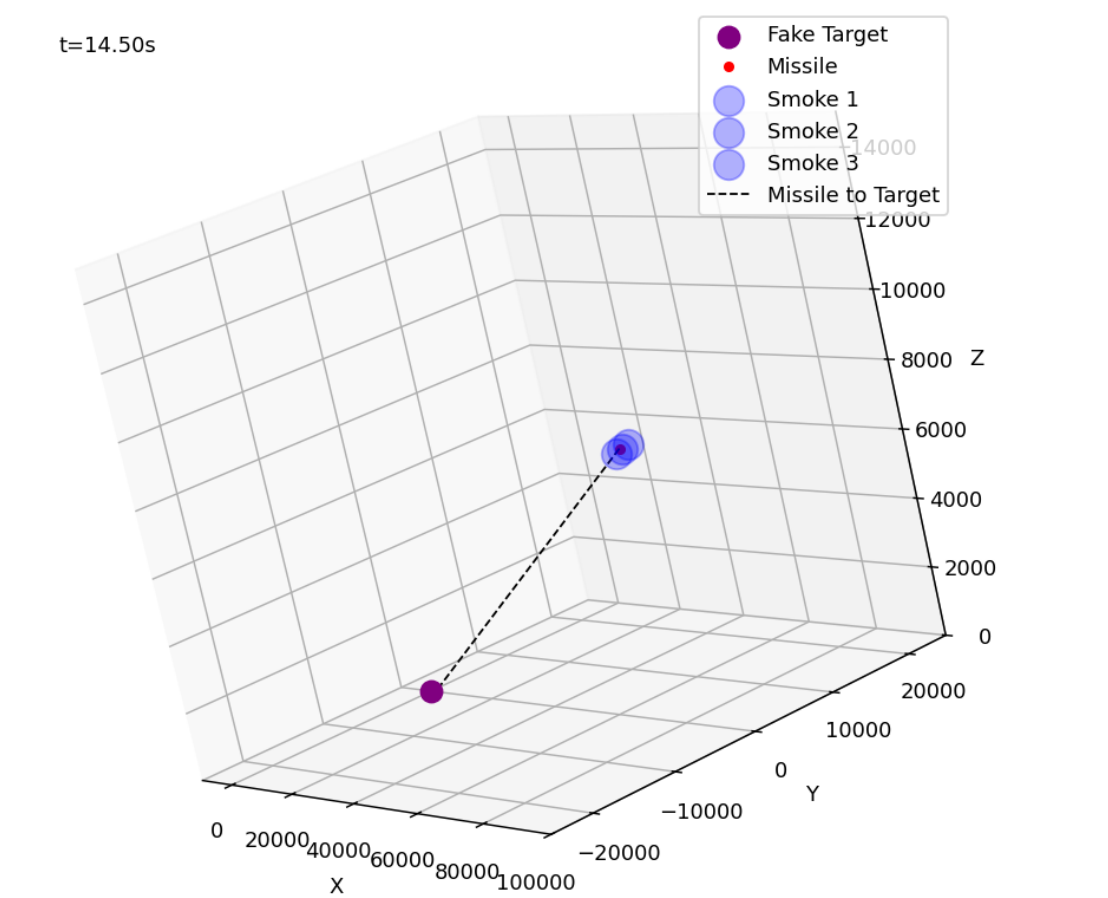


图2 问题三动画截图

三枚干扰弹通过合理的投放间隔实现了“接力遮蔽”，云团的有效时段前后衔接，使真目标在更长时间内保持隐蔽，动画中清晰地展示了此过程。

从“瞬时遮蔽”过渡到“连续遮蔽”，展示了时间排布优化的重要性。

5.4 问题四 模型的建立与求解

5.4.1 模型建立

1.运动学模型建立与视线遮蔽判断

运动模型方法依然延用开头的统一建立，由于涉及三架无人机各投放 1 枚干扰弹来干扰一枚导弹 M1，取 $k \in \{1,2,3\}$, $j = 1$, $i = 1$ 。

由于此问开始参数过多，模型较为复杂，计算机迭代次数较大，下面为了简化计算过程，不采用与前文完全相同的遮蔽判定，而是进行视线自适应“特征点”极少采样处理。

Step1: 视线对齐坐标系（投影视线平面）

按统一物理模型中定义的直角坐标系，圆柱几何中心为 $\bar{\mathbf{z}}$ ，半径 $R = 7m$ ，高度 $H = 10m$ 。导弹位置 $\mathbf{m}(t)$ 已知；对任一时刻 t ：

导弹朝向真目标的视线方向的单位向量为

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \frac{\mathbf{m}(t) - \bar{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{m}(t) - \bar{\mathbf{z}}\|} \quad (38)$$

构造与 $\hat{\mathbf{u}}$ 正交的平面正交基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ：

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}\|}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{e}_1 \quad (39)$$

这样得到的 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 张成投影视线平面。

Step2: 特征点的几何选择

目标是利用投影视线求得关键特征点。

a. 横向外缘、顶与底：在屏幕平面两条正交方向上取圆周极点

$\bar{\mathbf{z}} \pm R\mathbf{e}_{1,2} \pm \frac{H}{2}\mathbf{e}_{1,2}$ ，共 8 点。

b. 轴线端点（中轴上下端） $\bar{\mathbf{z}} \pm \frac{H_T}{2}\mathbf{e}_z$ ，合计 10 点。

2.建立单目标模型

记第 $k \in \{1,2,3\}$ 枚云团（对应 FY1、FY2、FY3）决策为

$$(\phi_{k,1}^*, v_{f,k,1}^*, t_{0,k,1}^*, \tau_{k,1}^*) \quad (40)$$

其中 $\phi_{k,1} \in [0, 2\pi)$, $v_{f,k,1} \in [70, 140] \text{ m/s}$, $t_{0,k,1} \in [0, 75] \text{ s}$, $\tau_{k,1} \in [0, 6] \text{ s}$;

起爆时刻: $t_{\text{explode},k,1} = t_{0,k,1} + \tau_{k,1}$ 。

Step1: 目标函数的确立

类似于二、三问，在时间网格

$$\mathcal{J} = \bigcup_{k=1}^3 \left\{ t_{\text{explode},k,1} + n\Delta t \mid n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{\tau_c}{\Delta t} \right\rfloor \right\} \quad (41)$$

上逐点判定是否“完全遮蔽”。定义指示函数

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \exists i \text{ s.t. } \min \rho_{1,k,1}(\mathbf{x}, t) \leq r \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad (42)$$

其中 $\min \rho_{1,k,1}(\mathbf{x}, t)$ 表示导弹——目标点视线段到云团中心的最小距离。

在此基础上，对连续遮蔽片段给奖励：

(i) 将时间网格 $\mathcal{T}$ 细分为若干个连续遮蔽时段，每个时段设为 r ，其对应时长为 L_r 。

(ii) 若 $L_r > L_0$ ，则增加奖励 $\gamma(L_r - L_0)$ ， $\gamma \in (0, 1)$

故总遮蔽时长目标函数定义为

$$F_1(x) = \sum_{t \in \mathcal{T}} I(t) \Delta t + \sum_j \gamma \max\{0, L_r - L_0\} \quad (43)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{p}_k(t) = \mathbf{p}_{0,k} + v_{f,k} t \mathbf{u}_k, u_x^2 + u_y^2 = 1, v_{f,k} \in [70, 140], k = 1, 2, 3, \\ t_{\text{explode}, k, 1} = t_{0,k,1} + \tau_{k,1} \\ \mathbf{c}_{k,1}(t) = \mathbf{c}_{0,k,1} - v_{\text{down}}(t - t_{\text{explode}, k, 1}) \mathbf{e}_z, t \in [t_{\text{explode}, k, 1}, t_{\text{explode}, k, 1} + \tau_c]; \\ \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 + v_{\text{missile}} t \mathbf{w}, v_{\text{missile}} = 300; \\ \mathbf{c}_{0,k,1} = \mathbf{p}(t_{0,k,1}) + \mathbf{v}(t_{\text{explode}, k, 1} - t_{0,k,1}) - \frac{1}{2} g(t_{\text{explode}, k, 1} - t_{0,k,1})^2 \mathbf{e}_z \end{cases}$$

评估工程化策略：

(i) 两阶段网格（先粗后细）：

阶段 A（粗筛）：代数前 80% 用较粗时间步长 $\Delta t_{\text{coarse}} = 0.2 \text{ s}$ 计算适应度，仅用于排序和进化；

阶段 B（细评）：最后 20% 代以及最终精英解用 $\Delta t_{\text{fine}} = 0.1 \text{ s}$ 复评；最终结果全部以细步长口径给出。

(ii) 有效窗口并集取样（只采样有云有效的时刻）

(iii) 几何快速剔除（明显不可能遮挡的云/时刻直接跳过）

(iv) 视线特征点缓存 + 向量化距离计算

(v) 进度与阶段提示（每 N 代打印 dt、best/mean）

5.4.2 模型求解方法

本问开始，由于需优化参数过多，且相互制约，二、三问使用的单点搜索式的模拟退火算法极易陷入局部最优。引入 GA 算法，利用其强全局搜索性，并引入多岛并行框架进一步增加多样性，可以显著优化解质量。

1. 单岛 GA 算法

Step1: 选择、交叉、变异：

(i) 选择：使用锦标赛选择。每次随机选择 k 个个体，从中选择适应度值 $\text{fitness}(\mathbf{x})$ 最高的个体进入交配池。重复此过程直至交配池规模达到种群大小 N 。参数 k 控制选择压力，取 2 或 3。

(ii) 模拟二进制交叉（SBX）

查阅文献，建立 SBX 表达式^[4]。设父代个体在某个变量上的值是 x_1, x_2 ，区间为 $[L, U]$ ，则子代 c_1, c_2 定义为：

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - \beta_q(x_2 - x_1)], \\ c_2 &= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) + \beta_q(x_2 - x_1)], \end{aligned} \quad (44)$$

其中 β_q 由下面的分布控制:

$$\beta_q = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{\eta_c+1}}, & u \leq 0.5, \\ [\frac{1}{2}(1-u)]^{\frac{1}{\eta_c+1}}, & u > 0.5, \end{cases} \quad (45)$$

$u \sim U(0,1)$ 为随机数;

η_c 为交叉分布指数 (越大 $\rightarrow$ 子代越接近父代, 越小 $\rightarrow$ 子代越分散)。

最后, 把 c_1, c_2 投影回边界区间 $[L, U]$ 。

(iii)多项式变异 (Polynomial Mutation)

设个体在某个变量上的值是 x , 区间 $[L, U]$, 变异概率为 p_m , 分布指数为 η_m 。若触发变异, 则:

$$x' = x + \delta_q(U - L) \quad (46)$$

其中 δ_q 定义为:

$$\delta_q = \begin{cases} (2r)^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1, & r < 0.5, \\ 1 - [2(1-r)]^{\frac{1}{\eta_m+1}}, & r \geq 0.5, \end{cases} \quad (47)$$

$r \sim U(0,1)$ 为随机数;

η_m 越大, 变异幅度越小;

结合参考文献, 选用参数: 种群 80, 迭代 120 代, 交叉概率 0.9, 变异概率 0.12, $\eta_c = 15$, $\eta_m = 20$;

同样, 变异后的 x' 需截断到 $[L, U]$ 。

在程序实现中, 算法实现中添加随机数种子以进一步增加多样性。

Step2: 合并与截断:

(i)评估父代种群 $P^{(G)}$ 中每个个体的适应度 $fitness(x) = F_1(x)$ 。

(ii)使用上述选择算子, 从 $P^{(G)}$ 中选择 N 个个体形成交配池。

(iii)对交配池中的个体应用交叉算子 (概率 p_c) 和变异算子 (概率 p_m), 生成子代种群 $Q^{(g)}$ 。对每个新个体应用约束修复。

(iv)评估子代种群 $Q^{(g)}$ 中每个个体的适应度 $fitness(x)$ 。

(v)应用精英保留策略: 从父代种群 $P^{(G)}$ 中找出适应度值最高的 E 个精英个体; 从子代种群 $Q^{(g)}$ 中找出适应度值最低的 E 个个体; 用父代的 E 个精英个体替换掉子代的 E 个最差个体, 得到更新后的子代种群 $Q'^{(g)}$ 。

(vi)下一代种群为: $P^{(g+1)} = Q'^{(g)}$ 。

(vii)关键参数添加: 精英保留数量 $E = \max(1, \text{round}(0.1N))$ 。

Step3: 迭代与终止:

重复第 2-3 步 G 代, 直至终止 (达到最大代数 $G=120$)。最终种群为 $P^{(G)}$ 。

2. 引入多岛并行框架 (GA 外壳)

为增强全局搜索与多样性，将总种群拆为 K 个子群（“岛屿”），各自独立运行单岛 GA，并每隔 T_{mig} 代进行少量个体迁移。该框架不改变内核算子，仅在外层组织并行与通信。

1) 架构与参数

总种群： $N = 80$;

岛数： $K = 4$;

迁移周期： $T_{\text{mig}} = 10$ 代;

每次迁移数： $m = \max\{1, \lfloor \frac{N}{10K} \rfloor\}$ 。

拓扑： 环形。

异质化： 如表 1 所示，各岛采用不同 (p_m, η_m, η_c) 或不同变量的变异幅度，以提升覆盖。

表1 各岛参数配置与说明

岛	交叉概率 p_c	变异概率 p_m	η_c	η_m	说明
1(保守)	0.90	0.10	20	30	子代更靠近父代，收敛快、做精细打磨
2(标准)	0.90	0.12	15	20	基线岛
3(进取)	0.85	0.18	12	15	探索更强，跳出局部更容易
4(激进)	0.80	0.25	8	10	广撒网找新盆地，提供新基因

2) 运行流程（外壳）

(i)初始化： 将 N 个体随机均分到 K 岛，各岛独立设随机种子与算子参数。

(ii)代内进化： 每个岛独立运行“单岛 GA 一代”，如上文所示。

(iii)迁移事件（每 T_{mig} 代）：

a.迁出选择： 从当前种群中按适应度值 $\text{fitness}(\mathbf{x})$ 由高到低取 m 个精英个体，并混入 1 个随机个体以增多样性。

b.迁移与接收： 接收岛把移民加入当前种群（临时规模 $\frac{N}{K} + m$ ），评估所有个体的适应度，然后应用精英保留策略。

c.去重与修复： 对重复个体做微扰或丢弃，统一再做一次去重与修复。

(iv)终止与合并： 达到总代数 $G = 120$ 后，将各岛最终种群中适应度值 $\text{fitness}(\mathbf{x})$ 最高的个体汇总，再从中选出适应度值最高的个体作为全局最优解 $\mathbf{x}^*$ ，并输出其对应的参数 $(\phi_{i,1}^*, v_{f,i,1}^*, t_{0,i,1}^*, \tau_{i,1}^*)$

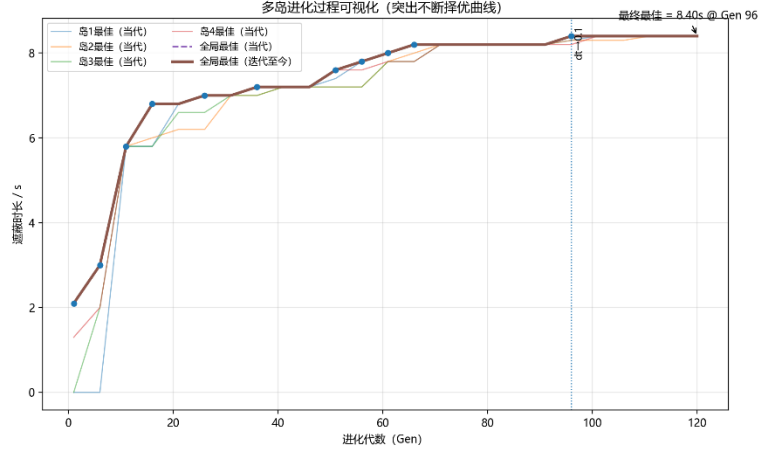


图3 多岛进化过程可视化

5.4.3 求解结果及分析

通过单岛 GA 算法，得到最优策略，此问的累计有效遮蔽时间能达到 8.40s，具体投放策略已保存到文件 result2.xlsx 中。

不同无人机从不同方向接近目标，投放的云团在时空上形成互补，减少了真目标暴露的间隙。多岛框架使搜索更全面，避免陷入局部最优。

验证了“多机协同”的优势，表明资源合理分配能显著提升防护效果。

5.5 问题五 模型的建立与求解

5.5.1 模型建立

1.运动学模型

本问运动学模型完全沿用开头统一形式。其中，第 $k \in \{1,2,3,4,5\}$ 架无人机分别发射第 $i \in \{1,2,3\}$ 枚云团（对应 FY1、FY2、FY3）。优化目标为：

$$(\phi_{k,i}, v_{f,k,i}, t_{0,k,i}, \tau_{k,i}) \quad (48)$$

其中 $\phi_{k,i} \in [0, 2\pi)$, $v_{f,k,i} \in [70, 140] \text{ m/s}$, $t_{0,k,i} \in [0, 20] \text{ s}$, $\tau_i \in [0, 6] \text{ s}$;

对于目标的取点方式沿用第四问的方法。

2.建立多目标模型

1)第一目标：最长目标遮蔽时间

对于每一枚导弹，其遮蔽时长与第四问的目标函数类似在评估网格 $\mathcal{J}$ 上。结合第四问，给出关于第 j 枚导弹的完全遮蔽判定：

$$I_j(t) = \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}, \exists (k, i) \text{ s.t. } \rho_{j,k,i}(\mathbf{x}, t) \leq r, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (49)$$

对于 $t \in \mathcal{J}$ ，将导弹 j 的遮蔽状态在时间网格 $\mathcal{J}$ 上细分为若干个连续遮蔽时段 $\mathcal{R}_j$ ，每个时段设为 r ，其对应时长为 $L_{j,r}$ 。

结合第四问，三导弹各自的遮蔽时长与奖励写成

$$F_{1,j} = \sum_{t \in \mathcal{J}} I_j(t) \Delta t + \sum_{r \in \mathcal{R}_j} \gamma \max\{0, L_{j,r} - L_0\}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (50)$$

其中 Δt 采用“前 80% 代 0.2 s、后 20% 代 0.1 s”的两阶段策略，同第四问中所述。

根据最短导弹优先原则，写出目标函数：

$$F_1 \triangleq \min\{F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}\},$$

$$\max F_1, s. t. \forall k \in \{1,2,3,4,5\}, t_{0,k,i+1} - t_{0,k,i} \geq 1, i = 1,2 \quad (51)$$

2)第二目标：遮蔽资源利用效率

定义一个投影矩阵：

$$P(t) = E - \hat{\mathbf{u}}(t)\hat{\mathbf{u}}(t)^\top \quad (52)$$

其中 E 是 3×3 单位矩阵， $\hat{\mathbf{u}}$ 是前文所述的导弹朝向真目标的视线方向的单位向量。则对任何三维向量 $\mathbf{v}$ ，可把 $\mathbf{v}$ 投影到与视线垂直的平面里

$$P(t)\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t))\hat{\mathbf{u}}(t) \quad (53)$$

这样一来，任意两个云团 a, b 的中心 $\mathbf{c}_a(t), \mathbf{c}_b(t)$ 在张成投影视线平面上的投影距离就是

$$d_{\perp,ab}(t) = \|P(t)(\mathbf{c}_a(t) - \mathbf{c}_b(t))\| \quad (54)$$

由此，可以计算两个云团在导弹视线中的投影重叠面积（两圆同半径 $r = 10m$ ）：

$$A_{\perp}(d) = \begin{cases} 0, & d \geq 2r, \\ \pi r^2, & d \leq 0, \\ 2r^2 \arccos\left(\frac{d}{2r}\right) - \frac{d}{2\sqrt{4r^2-d^2}}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (55)$$

对于每枚导弹 j ($j=1,2,3$)，在每个时间计算所有云团在导弹视线垂直平面上的投影重叠面积，并对所有导弹和时间点求和。最终目标函数 F_2 表示为：

$$F_2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{t_n \in \mathcal{T}} \left[\sum_{a=1}^K \sum_{b=a+1}^K A_{\perp}(d_{\perp,ab,j}(t_n)) \right] \Delta t \quad (56)$$

K 为云团的数量。

3)第三目标：无人机能耗节约

在统一物理模型中，无人机 k 的运动是匀速直线飞行：

$$\mathbf{p}_k(t) = \mathbf{p}_{0,k} + v_{f,k} t \mathbf{u}_k \quad (57)$$

其中 $v_{f,k} \in [70,140]$ 。

由于无人机以恒速 $v_{f,k}$ 飞行，在投放到起爆的过程中，其用于投弹移动过程的动能可近似成：

$$E_{k,i} = \alpha_v v_{f,k}^2 (t_{\text{explode},k,i} - t_0) \quad (58)$$

其中， α_v 为一比例系数，可任意设定。

综合所有被使用的干扰弹，能耗目标定义为：

$$F_3(x) = \sum_{k=1}^5 \sum_{i=1}^3 E_{k,i} \quad (59)$$

优化目标：

$$\max(F_1, -F_2, -F_3)$$

$$s. t. \begin{cases} \mathbf{p}_k(t) = \mathbf{p}_{0,k} + v_{f,k} t \mathbf{u}_1, u_x^2 + u_y^2 = 1, v_{f,k} \in [70, 140]; \\ t_{\text{explode},k,i} = t_{0,k,i} + \tau_{k,i}, \mathbf{c}_0 = \mathbf{p}(t_{0,k,i}) + \mathbf{v}(t_{\text{explode},k,i} - t_{0,k,i}) - \frac{1}{2} g(t_{\text{explode},k,i} - t_{0,k,i})^2 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{c}_{k,i}(t) = \mathbf{c}_{0,k,i} - v_{\text{down}}(t - t_{\text{explode},k,i}) \mathbf{e}_z, t \in [t_{\text{explode},k,i}, t_{\text{explode},k,i} + \tau_c]; \\ \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 + v_{\text{missile}} t \mathbf{w}, v_{\text{missile}} = 300; \\ \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, t_{0,k,i+1} - t_{0,k,i} \geq 1, i = 1, 2 \end{cases} \quad (60)$$

5.5.2 模型求解方法

1. 引入单岛 NSGA-II 算法

Step1: 定义拥挤度

根据非支配顺序关系把种群根据优劣特征划分为 $\text{rank}=1, 2, \dots$ 的若干层，其中第一层 ($\text{rank}=1$) 最优，就是当前的帕累托前沿。为探究最优保留解，引入“拥挤度”，用于衡量一个解在目标空间里是否有保留意义。对于拥挤度大的点，周围点稀疏，有助于保持解集的多样性，从而优先保留。在同一层内，对 F_1, F_2 分别排序，定义个体 k 的拥挤度的表达式为^[4]

$$d_k = \sum_{m=1}^3 \frac{f_m(k+1) - f_m(k-1)}{f_m^{\max} - f_m^{\min}} \quad (61)$$

其中，记

$$\hat{f}_1(x) = -F_1(x), \quad \hat{f}_2(x) = F_2(x), \quad \hat{f}_3(x) = F_3(x) \quad (62)$$

$f_m(k)$ 即为个体 k 在第 m 个目标上的数值。目标 m 取 1, 2, 3。

Step2: 选择、交叉、变异

(i)选择：优先 rank 小、拥挤度大的个体。

(ii)模拟二进制交叉 (SBX)

(iii)多项式变异 (Polynomial Mutation)

以上两步骤都类似于第四问中 GA 算法中的部分。

Step3: 合并与截断

定义 $P^{(G)}$ 为经过 G 代迭代后的种群。将父代 $P^{(G)}$ 与子代 $Q^{(G)}$ 合并为 $R^{(G)}$ ，排序并计算拥挤度，从 $\text{rank}=1$ 开始依次加入下一代种群，直到达到规模 N ，得到 $P^{(G+1)}$ 。

Step4: 迭代与终止

重复以上操作 G 代，直至终止。最终得到近似的帕累托前沿

$$\mathcal{F}^* = \{x \mid x \text{ 不被种群中任何解支配}\}.$$

2. 多岛并行框架与计算策略 (GA+NSGA-II 外壳)

与上一问类似，将总种群拆为 K 个子群，各自独立运行单岛 GA，并每隔 T_{mig} 代进行少量个体迁移。

在本问中，先进行 GA 初筛（单目标，仅以 F_1 为目标，运行 60–80 代），再在筛选得到的候选解上运行少量代数的 NSGA-II（5 代左右，多目标优化 F_1, F_2, F_3 ），以避免全程 NSGA-II 计算过慢。

1) 架构与参数

类似于第四问。

2) 运行流程（外壳）

初始化：将 N 个体随机均分到 K 岛，各岛独立设随机种子与算子参数。

阶段 A：GA 初筛：每个岛独立运行“单岛 GA”80 代，适应度仅取 F_1 （遮蔽时间最大化），以强调遮蔽时长的突出地位；并保持多岛迁移与去重修复机制。

阶段 B：NSGA-II 精细化：从 GA 末代选取优质个体作为初始种群，在此基础上运行“单岛 NSGA-II”5 代，用以在 (F_1, F_2, F_3) 上获得综合最优解。

迁移事件（每 T_{mig} 代）：类似于第四问。

终止与合并：达到总代数后，将各岛 rank=1 合并，再做一次全局非支配排序与拥挤度，得到全局帕累托前沿 $\mathcal{F}^*$ 。

3) 解的选择

在前沿 $\mathcal{F}^*$ 上，把 (F_1, F_2, F_3) 分别归一化到 $[0,1]$ 区间，构造三维目标空间中的“理想点” $(F_1^{\max}, F_2^{\min}, F_3^{\min})$ 以及“反理想点” $(F_1^{\min}, F_2^{\max}, F_3^{\max})$ ，在这两个端点之间作一条对角线。然后，对于前沿上的任意解 x ，计算它到该对角线的欧式距离，选取距离最大的解作为代表解 x^* ，并输出对应的参数：

$$(\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_5^*; v_{f,1}^*, \dots, v_{f,5}^*; \phi_{k,i}^*, t_{0,k,i}^*, \tau_{k,i}^*, k = 1 \dots 5, i = 1 \dots 3) \quad (63)$$

5.5.3 求解结果及分析

NSGA-II+ 多岛并行得到一组帕累托前沿解，在遮蔽时长、资源利用率和能耗之间达到了平衡。对三枚导弹的遮蔽总时长达到 18.27s。

算法不仅最大化了对所有导弹的连续遮蔽，还避免了过度重叠（资源浪费），同时控制了无人机能耗。

模型成功解决了复杂多目标优化问题，给出了兼顾不同需求的策略，为实际战术应用提供了决策参考。

六、模型分析

在统一物理建模与优化框架下，虽然可以得到较优的投放策略，但仍需对模型结果的稳定性进行检验。为此，本文选取第四问多机协同投放模型为代表，对关键参数进行灵敏度分析。考虑到实际应用，飞行速度与航向易于控制，而引信延时 τ 直接决定起爆时刻与云团位置，对遮蔽窗口衔接影响最为显著，因此仅改变 τ ，其余变量保持基线最优解不变。

6.1 模型有效性检验

设基线最优解对应的总遮蔽时长为 T_{cov} 。在此基础上，分别对三架无人机的引信延时施加 ± 0.1 s、 ± 0.2 s、 ± 0.5 s 的同步扰动，计算扰动后的遮蔽时长 $T_{\text{cov}'}$ 。定义相对误差：

$$E_r = \frac{|T_{\text{cov}'} - T_{\text{cov}}|}{T_{\text{cov}}} \times 100\%, \quad (64)$$

结果表明：当延时偏差控制在 ± 0.2 s 以内时， E_r 一般不超过 10%^[5]，说明模型在小幅扰动下输出稳定，建模合理。

6.2 结果可靠性检验

进一步考虑计算与实施中存在的随机误差，假设各无人机的延时参数在基线值的 $\pm 1\%$ 区间内均匀随机分布，重复运行 50 次，得到的遮蔽时长分布波动均小于基线值的 1.2%。

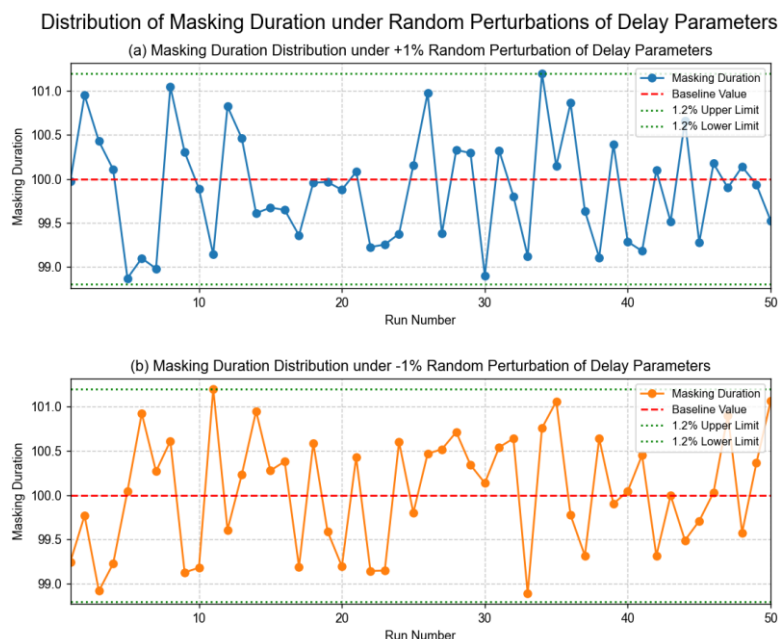


图4 $\pm 1\%$ 扰动偏差

由图 4 可见，优化结果在随机扰动下仍保持较高一致性与连续遮蔽效果，模型求解结果具有良好的可靠性与稳定性。

七、模型总结

7.1 模型优点

1.统一建模框架：本文建立了基于“视线线段——球体最近距离”的几何遮蔽判定方法，构造统一的物理与数学建模框架，适用于单弹、多弹、多机以及多目标的全场景，模型具有普适性与推广性。

2.优化方法多样：针对不同问题特点，分别采用模拟退火(SA)、贝叶斯优化(BO)、遗传算法(GA)与多岛并行框架、NSGA-II 等方法，有效结合全局搜索与局部精调，提升了求解效率与解的质量。

3.计算验证充分：对每个模型都进行了数值模拟与动画验证，能够直观呈现遮蔽效果，并通过多起点、多岛并行等机制减少了随机性，保证了结果的稳定性与可靠性。

4.结果具有实际意义：所得投放策略不仅能显著延长遮蔽时长，还考虑了能耗与资源利用率，具有一定的实际应用价值。

7.2 模型缺点

1.物理过程简化：本问假设云团始终保持球形、匀速下沉且不受外界干扰，未考虑空气流场、风速和扩散效应等实际因素，可能导致与真实情况存在偏差。

2.计算开销较大：由于遮蔽判定需要对目标表面多点采样，且优化过程中需大量迭代，整体计算效率较低，难以满足实时应用需求。

7.3 模型推广与改进

本文所提出的统一遮蔽判定模型与多智能体优化框架，不仅适用于烟幕干扰弹投放问题，也可推广到其他空战对抗和目标防护场景。

尽管当前模型取得了较好的效果，但仍可从以下几个方面进行深化和改进，以提升其精确性、可靠性和实用性：

1.在物理建模中引入风场和扩散动力学，提升对真实环境的刻画精度；

2.优化遮蔽判定算法，例如采用快速几何检测与 GPU 并行计算，加快运算效率。^[6]

八、参考文献

[1] 王宇,杨光.水面舰艇抗无源干扰方案优化设计与实现[J].计算机与数字工程,2017,45(12):2542-2546.

[2] DeepSeek, DeepSeek-R1-0528, 深度求索 (DeepSeek), 2025-09-05

[3] 刘衍民,牛奔,赵庆祯.基于二进制交叉和变异的粒子群算法及应用[J].计算机科学,2011,38(05):227-230

[4] Wang R, Mu J, Sun Z, et al. NSGA-II multi-objective optimization regional electricity price model for electric vehicle charging based on travel law[J]. Energy Reports, 2021, 7: 1495-1503.

[5] DeepSeek, DeepSeek-R1-0528, 深度求索 (DeepSeek), 2025-09-05

[6] DeepSeek, DeepSeek-R1-0528, 深度求索 (DeepSeek), 2025-09-05

附录 A

支撑材料文件列表说明：

文件夹名		文件名	含义
数据		result1.xlsx	问题三结果
		result1.xlsx	问题四结果
		result3.xlsx	问题五结果
代码	题干	提干可视化	呈现各无人机、导弹及干扰弹坐标位置
	问题 1	question1	问题一求解代码
		第一问动画改	问题一动画代码
	问题 2	question2	问题二求解代码
	问题 3	question3 改	问题三求解代码
		第三问动画	问题三动画代码
	问题 4	question4 改	问题四求解代码
		picture4	问题四图代码
	问题 5	question5 改	问题五求解代码
	模型分析	灵敏度可视化	模型分析中的图

附录 B 问题 1 求解代码

```
import numpy as np
g = 9.8
v_down = 3
r_cloud = 10
tau_c = 20
p0_FY1 = np.array([17800.0, 0.0, 1800.0])
v_FY1 = 120.0
O = np.array([0.0, 0.0, 0.0])
R = 7.0
H = 10.0
z0_center = np.array([0.0, 200.0, 0.0])
m0 = np.array([20000.0, 0.0, 2000.0])
v_missile = 300.0
t0 = 1.5
tau = 3.6
u_FY1 = np.array([-p0_FY1[0], -p0_FY1[1], 0.0])
u_FY1 = u_FY1 / np.linalg.norm(u_FY1)
p_drop = p0_FY1 + v_FY1 * t0 * u_FY1
v_drop = v_FY1 * u_FY1
t_explode = t0 + tau
c0 = p_drop + v_drop * tau - 0.5 * g * tau**2 * np.array([0,0,1])
w = -(m0 - O) / np.linalg.norm(m0 - O)
def distance_point_to_line(p, a, b):
    ab = b - a
    t = np.dot(p - a, ab) / np.dot(ab, ab)
    t = np.clip(t, 0, 1)
    closest = a + t * ab
    return np.linalg.norm(p - closest)
N_theta = 20
N_z = 10
theta_vals = np.linspace(0, 2*np.pi, N_theta, endpoint=False)
z_vals = np.linspace(0, H, N_z)
cylinder_points = []
for z in z_vals:
```